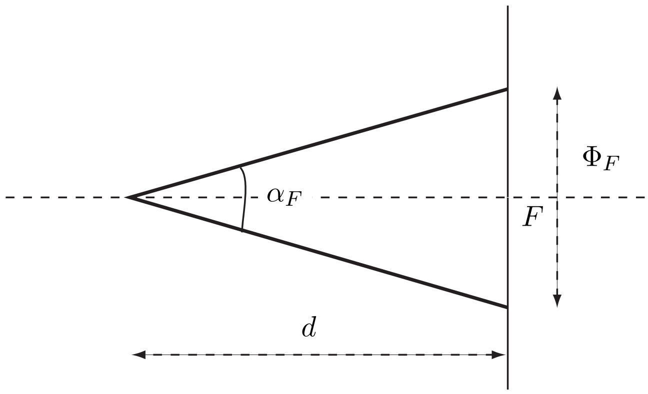
Corrigé proposé par :
M. Afekir - École Royale de l'Air
CPGE Marrakech
cpgeafek@yahoo.fr

Microscopie

Première partie
OEil1

1.1. Champ latéral et champ en profondeur

1.1.1.



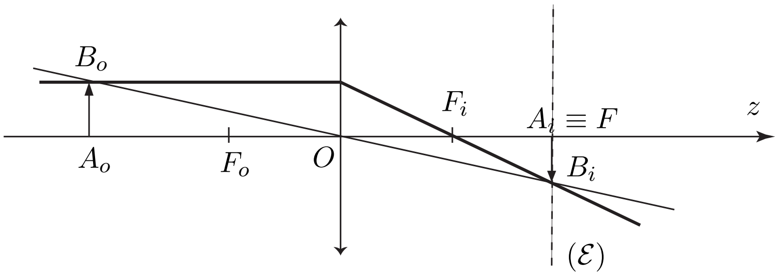
$$\tan\left(\frac{\Phi_F}{2}\right)=\frac{\alpha_F}{2d} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_F=2d\tan\left(\frac{\alpha_F}{2}\right)$$

Application numérique : $\Phi_F\ =$

1.1.2.

$$\mathcal{P}=\frac{1}{f_i} \qquad ; \qquad p=\overline{A_oO}=-\overline{OA_o}, \quad ; \qquad \text{et} \quad ; \qquad p=\overline{OA}$$

Pour que $\overline{A_oB_o}$ soit vu nettement, il faut que A (image de A_o) coïncide avec F $(\in\ (\mathcal{E}))$; soit : $\overline{OA}\ =d$

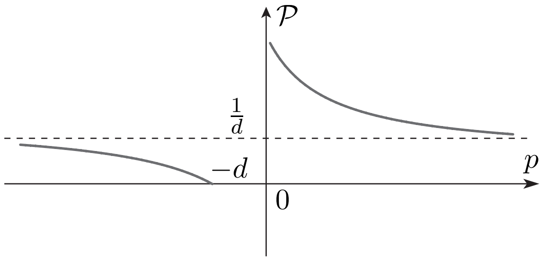


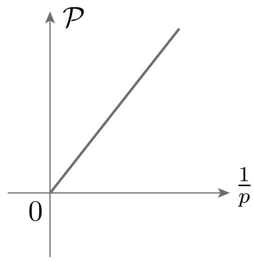
La relation de conjugaison avec origine au centre appliquée à $(\mathcal{L})$:

$$\frac{1}{f_i}=\frac{1}{\overline{\overline{OA_o}}}-\frac{1}{\overline{\overline{OA}}}=\frac{1}{d}+\frac{1}{p}$$

soit : $$\boxed{\mathcal{P}(p)=\frac{1}{d}+\frac{1}{p}}$$

Concours National Commun — PHYSIQUE I —Filière : MP





1.1.3. Punctum proximum

$$\mathcal{P}_{max} = \mathcal{P}\left(P_p\right) \quad ; \quad P_p = -\overline{OP_p}$$

soit : $$\boxed{\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d} + \frac{1}{P_p}}$$

<u>Application numérique</u> : $\mathcal{P}_{max} \; = \; 62,8\,\delta$

1.1.4. Punctum remotum

$$\mathcal{P}_{min} = \mathcal{P}\left(P_r\right) \quad ; \quad P_p = -\overline{OP_p} \sim \infty$$

soit : $$\boxed{\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d}}$$

<u>Application numérique</u> : $\mathcal{P}_{min} \; = \; 58,8\,\delta$

1.1.5. Amplitude maximale d'accommodation A

$$\boxed{A = \mathcal{P}_{max} - \mathcal{P}_{min} = \frac{1}{P_p}}$$

<u>Application numérique</u> : $A \; = \; 4\,\delta$

1.2. Défaut de l'oeil et correction

1.2.1. Myopie

$$d_m = 17,5\,mm$$

1.2.1.1. Position de l'image d'un objet très éloigné

$$\mathcal{P}_{min} = \frac{1}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{1}{\mathcal{P}_{min}} = 17\,mm \; < \; d_m \; = \; 17,5\,mm}$$

L'oeil myope n'est, donc, pas capable de former l'image de tel objet sur la rétine (l'image se forme avant la rétine).

1.2.1.2.

$$\mathcal{P} \; = \; \frac{1}{d} \; + \; \frac{1}{p} \qquad ; \qquad \text{on pose :} \quad \begin{array}{l} \left|\overline{OP_p}\right| \; = \; p_p \\ \left|\overline{OP_r}\right| \; = \; p_r \end{array}$$

$$\mathcal{P}'_{max} \; = \; \frac{1}{p_p} \; + \; \frac{1}{p} = \mathcal{P}_{max} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'_{min} \; = \; \frac{1}{p_r} \; + \; \frac{1}{p} = \mathcal{P}_{min}$$

Soient : $$\boxed{p_p \; = \; \frac{d_m}{d_m\mathcal{P}_{max} - 1} \quad \text{et} \quad p_r \; = \; \frac{d_m}{d_m\mathcal{P}_{min} - 1}}$$

<u>Applications numériques</u> : $p_p \; = \; 17,7\,cm$ et $p_r \; = \; 60,3\,cm$

1.2.1.3.

$$\text{Absence d'anomalie si et seulement si : } \mathcal{P}_{min}^{tot} = \frac{1}{d_m}$$

$$\mathcal{P}^{tot} = \mathcal{P} + \mathcal{P}^m \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}^m = \frac{1}{f_m}$$ le signe de f_m détermine le type de lentille

$$\mathcal{P}_{min}^{tot} = \mathcal{P}_{min} + \mathcal{P}_{min}^m = \frac{1}{d_m} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathcal{P}_{min}^m = \frac{1}{d_m} - \mathcal{P}_{min}}$$

Application numérique : $P^m = -1,68\,\delta < 0$ et $\boxed{f_m = \overline{OF_{im}} = -59,5\,cm < 0}$
Il s'agit, donc, d'une lentille divergente.

1.2.2. Hypermétrope

$$d_h = 16,5\,mm$$

1.2.2.1. $d_h > 17\,mm$: L'image se forme au dela de la rétine, d'où possibilité d'accommodation.

$$\text{La puissance : } \boxed{\mathcal{P}_n = \frac{1}{d_h} = 606,06\,\delta}$$

1.2.2.2. D'après la question 1.2.1.2. :

$$\boxed{p_p = \frac{d_h}{d_h\mathcal{P}_{max} - 1} \quad \text{et} \quad p_r = \frac{d_h}{d_h\mathcal{P}_{min} - 1}}$$

1.2.2.3.

$$\mathcal{P}_{min}^{tot} = \mathcal{P}_{min} + \mathcal{P}_{min}^h = \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{min} + \frac{1}{f_h} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f_h = \frac{1}{\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{min}}}$$

Application numérique : $f_h = \overline{OF}_{ih} = +59,5\,cm$ il s'agit, donc, d'une lentille convergente .

1.2.3. Presbytie

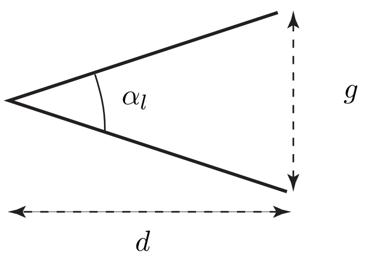
$$\mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} = 1,14\,\delta$$

$$\text{vision sans accommodation : } \mathcal{P}_{max} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p_p}$$

$$\text{ou : } \mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} = \frac{1}{d_{min}^{\text{presbytie}}} + \frac{1}{p_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{min}^{\text{presbytie}} = \frac{p_p}{p_p\mathcal{P}_{max}^{\text{presbytie}} - 1} = 85,94\,cm}$$

1.3. Limite de résolution angulaire de l'oeil

1.3.1.



$$\boxed{\alpha_l = \frac{g}{d}}$$

Application numérique : $\alpha_l = 3 \times 10^{-4}\,rad$

1.3.2. Soit : $p_o = \overline{OA_o}$ la position de l'objet.

$$\mathcal{P}_{max} = \frac{1}{p_o} + \frac{1}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_o = \frac{d}{d\mathcal{P}_{max} - 1} = -25,14\,cm}$$

Deuxième partie
Microscope composé

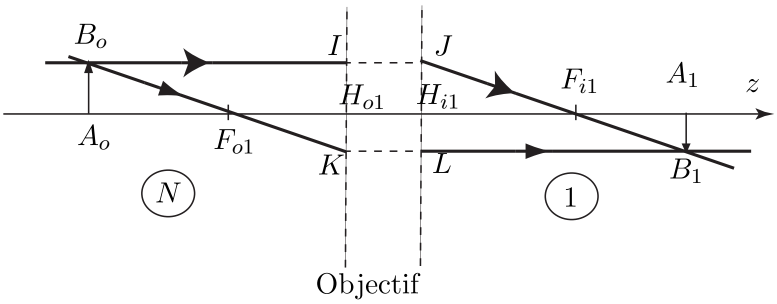
2.1. Mise au point

2.1.1. Conditions de gauss L'approximation de gauss consiste à ce que les rayons incidents, arrivant sur un instrument optique, soient :(rayon paraxiaux !)

- faiblement inclinés par rapport à l'axe optique de l'instrument.
- peu inclinés sur l'axe optique

2.1.2. L'objectif du microscope ne fonctionne pas dans les conditions de gauss, car les rayons sont loin d'être faiblement inclinés sur l'axe optique ($\alpha_m = 70^o$).

2.1.3. Grandissement transversal G_{t1}



- Considérons les triangles : $(\widehat{F_{i1}A_1B_1})$ et $(\widehat{F_{i1}H_{i1}J})$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1F_{i1}}} = \frac{\overline{H_{i1}J}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} = \frac{\overline{A_oB_o}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{\overline{H_{i1}F_{i1}}} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{f_{i1}}}$$

- Considérons les triangles : $(\widehat{F_{o1}A_oB_o})$ et $(\widehat{F_{o1}H_{o1}I})$

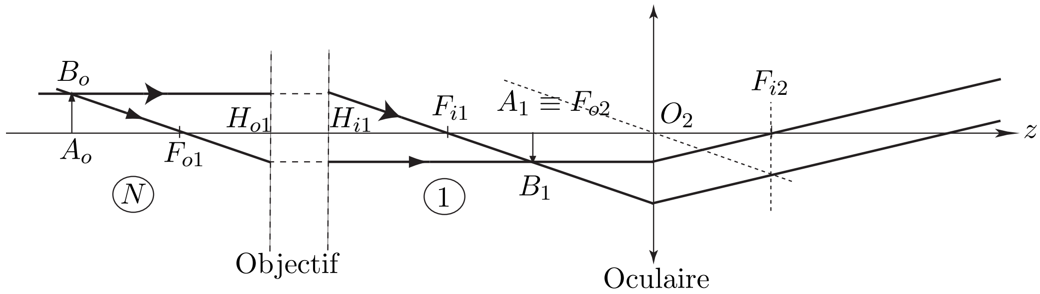
$$\frac{\overline{A_oB_o}}{\overline{A_oF_{o1}}} = \frac{\overline{H_{o1}K}}{\overline{H_{o1}F_{o1}}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{H_{o1}F_{o1}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{G_{t1} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_oB_o}} = \frac{\overline{H_{o1}F_{o1}}}{\overline{A_oF_{o1}}} = \frac{f_{o1}}{\overline{A_oF_{o1}}}}$$

En utilisant les deux expressions du grandissement G_{t1} , on retrouve la relation de conjugaison avec origine aux foyers pour deux points conjugués par l'objectif (Relation de Newton) ; soit :

$$G_{t1} = \frac{\overline{A_1F_{i1}}}{f_{i1}} = \frac{f_{o1}}{\overline{A_oF_{o1}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\overline{F_{o1}A_o}\,\overline{F_{i1}A_1} = f_{o1}\,f_{i1}}$$

2.1.4. Pour une observation sans accommodation, l'image définitive doit se trouver à l'infini. Pour que cette condition soit réalisée il faut, donc, que l'image intermédiaire A_1B_1 se trouve dans le plan focale objet de l'oculaire.

2.1.5.



2.1.6. Position de l'objet A_oB_o

La relation de Newton appliquée aux conjugués A_o et $A_1 \equiv F_{o2}$ par l'objectif (Cf. la relation (4) en **2.1.3**), donne :

$$\overline{F_{o1}A_o}\,\overline{F_{i1}F_{o2}} = f_{o1}\,f_{i1} \qquad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} \overline{F_{i1}F_{o2}} = \Delta \\ f_{o1} = -N\,f_{i1} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{F_{o1}A_o} = \frac{f_{o1}\,f_{i1}}{\Delta}$$

$$\text{soit :} \qquad \boxed{\overline{F_{o1}A_o} = -\frac{f_{i1}^2}{\Delta}N}$$

2.1.7. Grandissement transversal G_{t1} : D'aprè s la question 2.1.3. :

$$G_{t1} = -\frac{f_{o1}}{\overline{F_{o1}A_o}} = \frac{\overline{A_1F_{o1}}}{f_{i1}} = N\frac{f_{i1}}{\overline{F_{o1}A_o}}$$

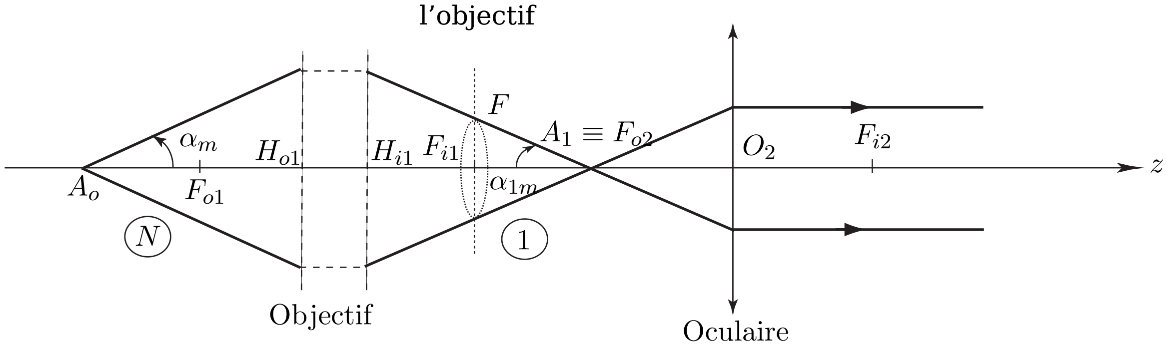
$$\text{soit :} \qquad \boxed{G_{t1} = -\frac{\Delta}{f_{i1}}}$$

2.1.8. <u>Application numérique</u> : $\overline{F_{o1}A_o} = -0,12\,mm$ et $G_{t1} = -50$

2.2. Cercle oculaire

2.2.1.

plan focal image
de
l'objectif



2.2.2. Expression du rayon R

$$R = |\overline{F_{i1}F}| \qquad \text{tel que : } \tan\alpha_{1m} = \frac{\overline{F_{i1}F}}{\Delta} \sim \alpha_{1m}$$

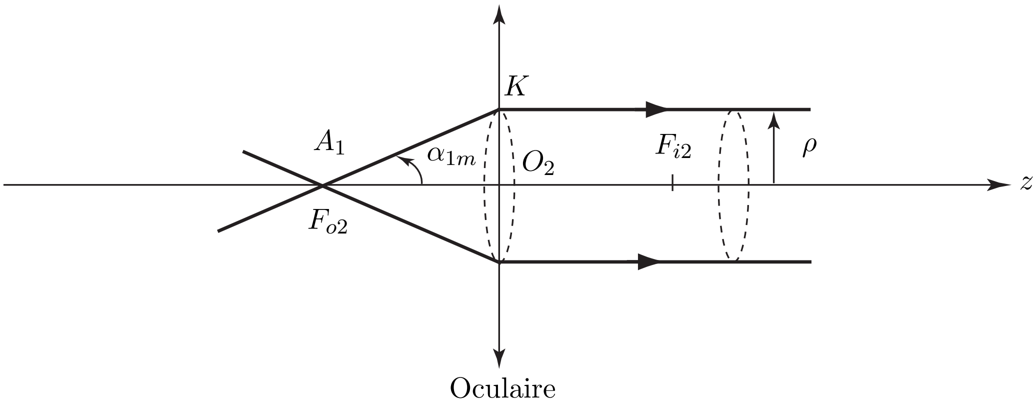
L'objectif du microscope est rigoureusement stigmatique : tout rayon issu de A_o émerge en passant par A_1 . Ces rayons sont, donc, délimités par le cercle de rayon R centré sur F_{i1} .

$$\text{la condition d'aplanétisme pour l'objectif : } N\overline{A_oB_o}\sin\alpha_m = \overline{A_1B_1}\alpha_{1m} = \overline{A_1B_1}\frac{\overline{F_{i1}F}}{\Delta}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{F_{i1}F} = N\Delta\frac{\overline{A_oB_o}}{\overline{A_1B_1}} = \Omega_n\frac{\Delta}{G_{t1}} = -\Omega_n f_{i1} \qquad (\Omega_n = N\sin\alpha_m)$$

soit : $\boxed{R = |\overline{F_{i1}F}| = \Omega_n f_{i1}}$

2.2.3.

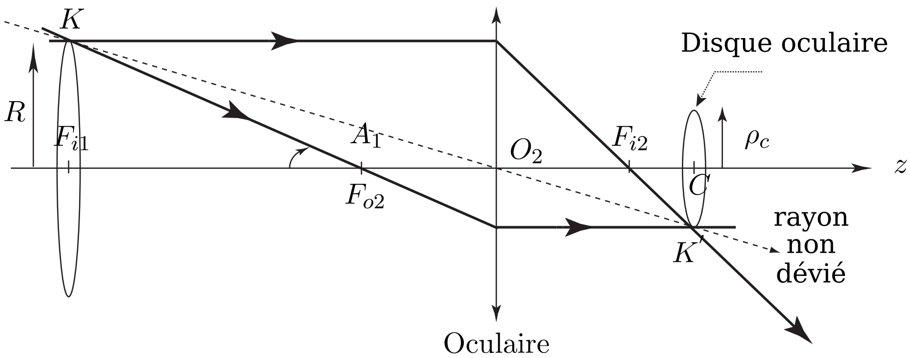


$$\tan\alpha_{1m} = \frac{\overline{O_2K}}{\overline{F_{o2}O_2}} = \frac{\overline{O_2K}}{f_{i2}} \sim \alpha_{1m} \quad \text{et} \quad |\alpha_{1m}| = \frac{R}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \rho = |\overline{O_2K}| = f_{i2}\frac{R}{\Delta}$$

Soit : $\boxed{\rho = \Omega_n\frac{f_{i1}f_{i2}}{\Delta}}$

2.2.4.

2.2.4.1.



- C est l'image de F_{i1} à travers l'oculaire. La relation de conjugaison de Newton entre C et F_{i1} par l'oculaire :

$$\overline{F_{o2}F_{i1}}\,\overline{F_{i2}C} = f_{o2}f_{i2} = -f_{i2}^2 \qquad \text{avec} \qquad \overline{F_{o2}F_{i1}} = \Delta$$

Soit : $\boxed{\overline{F_{i2}C} = \frac{f_{i2}^2}{\Delta}}$

- Le *disque oculaire* centré sur C est l'image du disque centré sur F_{i1} à travers l'oculaire.
- ρ_c est, donc, l'image de R à travers l'oculaire. La relation de grandissement entre ρ_c et R par l'oculaire :

$$|G_{t2}| = \left|\frac{\overline{F_{i1}F}}{\overline{CK'}}\right| = \frac{\rho_c}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_c = R|G_{t2}|$$

$G_{t2} = \dfrac{\overline{F_{i2}C}}{f_{i2}}$, voir 2.1.3.

Soit : $\boxed{\rho_c = R\frac{\overline{F_{i2}C}}{f_{i2}} = R\frac{f_{i2}}{\Delta} = \Omega_n\frac{f_{i1}f_{i2}}{\Delta} = \rho}$

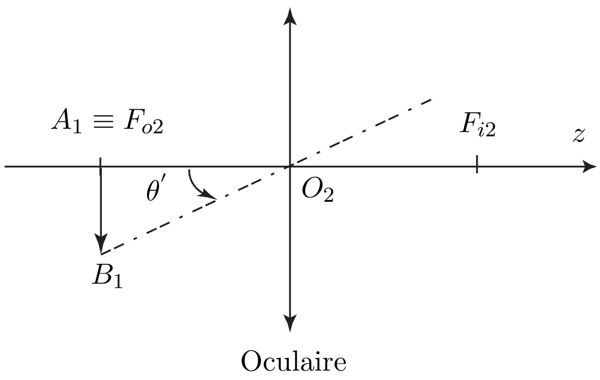
Pour recevoir le maximum de lumière, on doit placer l'oeil au point C : centre du *disque oculaire*.

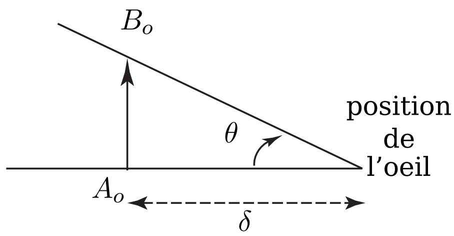
2.2.4.2. Application numérique : $\rho_c = 0,569\,mm$ et $\overline{F_{i2}C} = 2\,mm$

2.3. Grossissement G

$$G = \frac{\theta'}{\theta}$$ avec : θ' : L'angle sous lequel l'objet est vu à travers le microscope ; θ : L'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu

2.3.1.





$$\theta' \sim \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{F_{i2}O_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_{i2}} \qquad \text{et} \qquad \theta \sim \frac{\overline{A_oB_o}}{\delta}$$

Soit : $$\boxed{G = \frac{\theta'}{\theta} = G_{t1}\frac{\delta}{f_{i2}} = -\frac{\delta\Delta}{f_{i2}f_{i1}}}$$

Application numérique : $G = -625$

2.3.2. Rayon du cercle oculaire ρ_c

$$\rho_c = \Omega_n \frac{f_{i1}f_{i2}}{\Delta} \quad \text{et} \quad G = -\frac{\delta\Delta}{f_{i2}f_{i1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_c = -\Omega_n \frac{\delta}{G}}$$

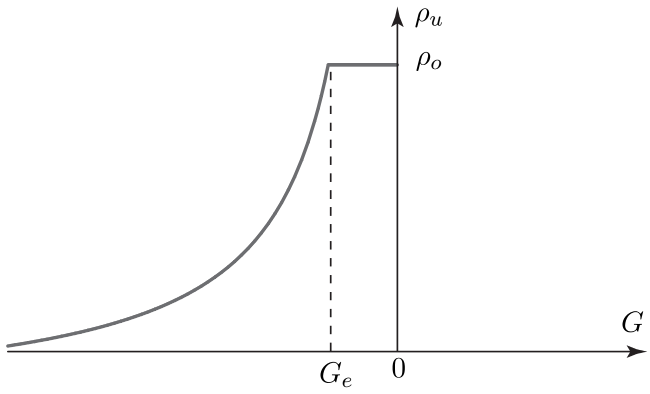
2.3.3. ρ_o : rayon de la pupille de l'oeil.

$$\rho_o = -\Omega_n \frac{\delta}{G_e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_c = -\Omega_n \frac{\delta}{G} \qquad G_e = -\Omega_n \frac{\delta}{\rho_o}}$$

Application numérique : $G_e = -142$

2.3.4. Pur recevoir le maximum de lumière, on doit placer l'oeil au centre du cercle oculaire (Cf. 2.2.4.1.) : le rayon utile ρ_u est, par conséquent, égal à ρ_c ; soit :

$$\boxed{\rho_u = -\Omega_n \frac{\delta}{G} = -N\sin\alpha_m \frac{\delta}{G}}$$



2.4. Pouvoir de résolution

2.4.1. Influence de la diffraction

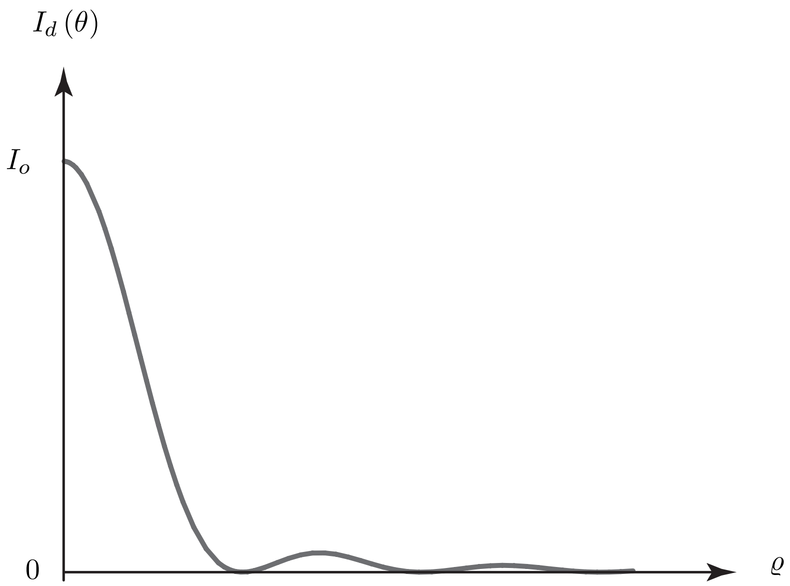
2.4.1.1. Phénomène de diffraction :

La diffraction est le phénomène observé lorsqu'on s'écarte de l'approximation de l'optique géométrique. C'est à dire lorsque un faisceau lumineux (de longueur d'onde λ) est masqué par des diaphragmes (pupilles) dont les dimensions voisins de λ (ondes lumineuses matériellement limitées).

2.4.1.2. Intensité lumineuse $I_d(\theta)$

$$\boxed{I_d(\theta) = a_d^2(\theta) = 4I_o\left(\frac{J_1(2\pi\varrho)}{2\pi\varrho}\right)^2 \quad \text{tels que :} \quad \varrho = \frac{R\theta}{\lambda} \quad \text{et :} \quad I_o = a_o^2}$$

2.4.1.3. Figure de diffraction :



2.4.1.4. Rayon angulaire :

$$\varrho = \frac{R\theta}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \varrho_1 = \frac{R\theta_d}{\lambda} \simeq 0,61 \quad \text{(tache centrale)}$$

soit : $$\boxed{\theta_d \simeq 0,61\,\frac{\lambda}{R} \simeq 0,61\,\frac{\lambda}{f_{i1}\Omega_n}}$$

2.4.1.5. Critère de Rayleigh :

Soient :

- d : distance des centres des taches de diffraction.
- r_d : rayon d'une tache de diffraction.
- S_d : plus petite distance de deux points séparables.
- S_d est le conjugué de r_d par l'objectif.

Les deux point objets A_o et B_o sont séparables si : $r_d \sim d$

D'une part, on a :

$$\tan\theta_d \sim \theta_d = \frac{r_d}{\Delta} = 0,61\,\frac{\lambda}{f_{i1}\Omega_n} \qquad \Rightarrow \qquad r_d = 0,61\,\frac{\Delta\lambda}{f_{i1}\Omega_n}$$

D'autre part, on a d'après 2.1.7. :

$$|G_{t1}| = \frac{r_d}{S_d} = \frac{\Delta}{f_{i1}}$$

Soit :

$$\boxed{S_d = \frac{r_d}{\Delta}f_{i1} = 0,61\,\frac{\lambda}{\Omega_n}}$$

$$S_d = 0,61\,\frac{\lambda}{N\sin\alpha_m} = S_d\,(\lambda\,,\,N\,,\,\alpha_m)$$

Améliorer le pouvoir séparateur, c'est agir sur les trois paramètres dont elle dépend S_d. Pour diminuer S_d, il suffit :

- d'augmenter α_m (à λ et N, donnés).
- de diminuer λ (à α_m et N, donnés)..
- d'augmenter N (à λ et α_m, donnés).

2.4.2. Influence pouvoir séparateur de l'oeil

$$\alpha_l = 3\times 10^{-4}$$

2.4.2.1.

2.4.2.2. Distance minimale S_s : D'après 2.3.1. ;

$$\text{le grossissement } G = \frac{\alpha_l}{\alpha_o} \text{ tel que : } \alpha_o = \frac{S_s}{\delta}$$

$$\text{soit : } \boxed{S_s = \frac{\alpha_l}{G}\delta}$$

2.4.3. Discussion

2.4.3.1. Valeur minimale G_d de G

$$\text{le grossissement minimal } G_d = \frac{\alpha_l}{\alpha_o} \text{ tel que : } \alpha_o = \frac{S_d}{\delta}$$

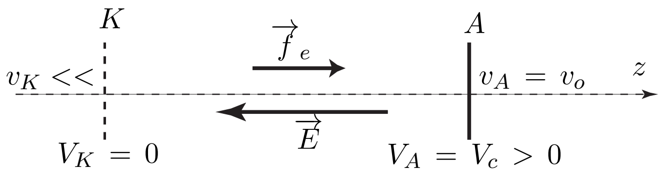
$$\text{soit : } \boxed{G_d = \frac{\alpha_l}{S_d}\delta = \frac{\alpha_l\Omega_n}{0,61\lambda}\delta}$$

2.4.3.2. application numérique : $S_d = 0,21\,\mu m$ et $S_s = 0,12\,\mu m$

$S_s < S_d \quad \Longrightarrow$ La diffraction limite le pouvoir de résolution du microscope étudié !

Troisième partie
Microscope électronique

3.1. Principe



3.1.1. Vitesse v_o des électrons accélérés

des forces subies par chaque é lectron : $\begin{array}{lcl} \overrightarrow{P} & = & m_e\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{f_e} & = & -e\overrightarrow{E} \end{array}$ telles que : $\left|\overrightarrow{P}\right| << \left|\overrightarrow{f_e}\right|$

$$\overrightarrow{f_e} = -e\,\overrightarrow{E} = +e\,\overrightarrow{grad}V$$

Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron :

$$\Delta_K^A E_c = W(\overrightarrow{f_e}) \text{ avec : } \begin{cases} \Delta_K^A E_c = \dfrac{1}{2}m_e\left(v_A^2 - v_K^2\right) \approx \dfrac{1}{2}m_e v_o^2 \\ W(\overrightarrow{f_e}) = \displaystyle\int_{(K)}^{(A)} \overrightarrow{f_e}.\overrightarrow{dz} = +e\int_{(K)}^{(A)} \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dz} = +e\int_{(K)}^{(A)} dV = e\,(V_K - V_A) = eV_c \end{cases}$$

soit : $\dfrac{1}{2}m_e v_o^e = +e\,V_c$ ou $\boxed{v_o = \sqrt{\dfrac{2eV_c}{m_e}}}$

3.1.2. Longueur d'onde associée à l'électron

$$\boxed{\lambda_e = \frac{h}{m_e v_o} = \frac{h}{\sqrt{2m_eV_c}}}$$

3.1.3. Application numérique : $v_o = 5,77 \times 10^7\,m.s^{-1}$ $\quad et \quad$ $\lambda_e = 1,2 \times 10^{-10}\,m$

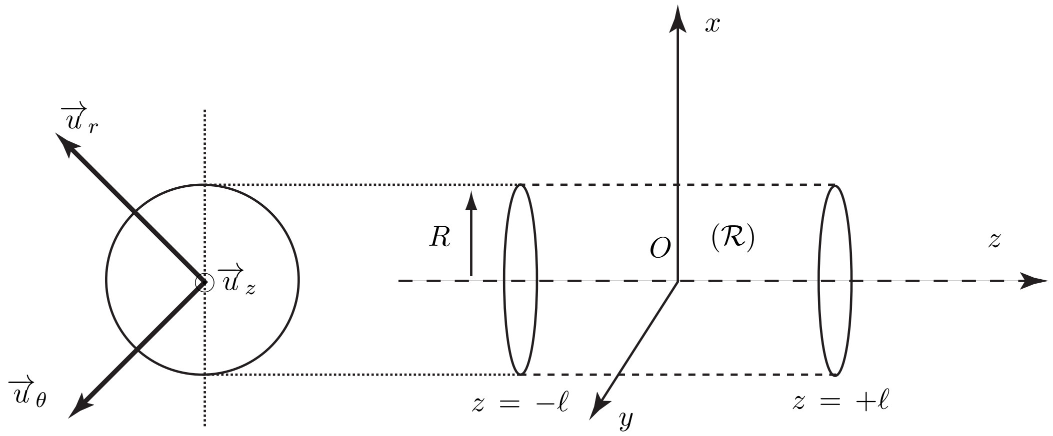
3.1.4. Les limites en longueur d'onde du spectre de la lumière visible sont telles que :

$$\boxed{0,4\,\mu m \leq \lambda_{visible} \leq 0,8\,\mu m}$$

On remarque que la longueur d'onde associée à l'électron $\lambda_e < \lambda_{visible}$: le pouvoir de résolution du microscope électronique est, donc, meilleur à celui du microscope optique !

3.2. Lentille électrostatique

3.2.1. Champ électrostatique dans la lentille



3.2.1.1. En un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le champ électrostatique s'écrit :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r, \theta, z)$$

- Invariance de $\overrightarrow{E}$

  La source du champ est invariante par rotation autour de l'axe Oz : $\overrightarrow{E}$ est, donc, indépendant de θ .

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r, z)$$

- Symétrie de $\overrightarrow{E}$

  Tout plan contenant l'axe Oz et la point M (soit $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$) est un plan de symétrie pour la source du champ : $\overrightarrow{E}$ appartient, donc, à ce plan.

$$\overrightarrow{E} = \left(\overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{E}(r, z)\right)\overrightarrow{u}_r + \left(\overrightarrow{u}_z.\overrightarrow{E}(r, z)\right)\overrightarrow{u}_z$$

On pose : $\begin{aligned} F(r, z) &= \overrightarrow{u}_r.\overrightarrow{E}(r, z) \\ G(r, z) &= \overrightarrow{u}_z.\overrightarrow{E}(r, z) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{E}(r, z) = F(r, z)\,\overrightarrow{u}_r + G(r, z)\,\overrightarrow{u}_z}$

3.2.1.2. Le plan $z = 0$ (soit $\Pi_o \equiv (xOy)$) est, aussi, un plan de symétrie pour la source du champ électrostatique : en tout point N de ce plan, le champ électostatique appartient, donc, à l'intersection de Π_o et le plan $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ définit en 3.2.1.1., et contenant N. L'intersection entre ces deux plans est $\overrightarrow{u}_r$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{u}_z.\overrightarrow{E}(r, z = 0) = G(r, z = 0) = 0}$$

3.2.1.3. Équations locales vérifiées par $\overrightarrow{E}$ (Équations de maxwell en régime électrosatique)

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \quad et \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}}$$

3.2.1.4. Équations aux dérivées partielles

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}(r, z) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}(r, z) = \left(\frac{\partial F(r, z)}{\partial z} - \frac{\partial G(r, z)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u}_\theta$$

et

$$div\,\overrightarrow{E}(r, z) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E}(r, z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rF(r, z))}{\partial r} + \frac{\partial(G(r, z))}{\partial z}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF(r, z))}{\partial r} + \frac{\partial(rG(r, z))}{\partial z}\right)$$

D'après les équations locales établie en 3.2.1.3., on en déduit les équations suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial F(r, z)}{\partial z} - \dfrac{\partial G(r, z)}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial(rF(r, z))}{\partial r} + \dfrac{\partial(rG(r, z))}{\partial z} = 0 \end{cases}} \qquad (8)$$

Concours National Commun — PHYSIQUE I —Filière : MP

3.2.1.5. La source du champ électrostatique impose :

$$F(r,z) = \beta r = \frac{2U_o}{R}r$$

D'après la question précédente : $\dfrac{\partial(rF(r,z))}{\partial r} = -\dfrac{\partial(rG(r,z))}{\partial z} = -\dfrac{4U_o}{R}r$

$$\Rightarrow \qquad G(r,z) = -\frac{4U_o r}{R}z + \frac{1}{r}f(r)$$

Or la fonction $G(r,z) = 0$ dans le plan $z = 0$ d'où : $f(r) = 0$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{G(r,z) = -\frac{4U_o r}{R}z = \beta' z \quad \text{avec} \quad \beta' = -2\beta}$$

3.2.1.6. Potentiel électrostatique Φ

$$\overrightarrow{E}(r,z) = F(r,z)\overrightarrow{u}_r + G(r,z)\overrightarrow{u}_z = \beta r\overrightarrow{u}_r - 2\beta z\overrightarrow{u}_z$$

Le potentiel Φ est tel que : $\overrightarrow{E}(r,z) = -\overrightarrow{grad}\Phi$ ou $\overrightarrow{E}(r,z).\overrightarrow{dr} = -d\Phi$

$$\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{u}_r + rd\theta\overrightarrow{u}_\theta + dz\overrightarrow{u}_z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E}(r,z).\overrightarrow{dr} = \beta r dr - 2\beta z dz = d\left(\beta\frac{r^2}{2} - \beta z^2 + C\right)$$

soit : $\boxed{\Phi(r,z) = -\beta\dfrac{r^2}{2} + \beta z^2 + C \quad ; \; C : \text{ constante d'intégration}}$

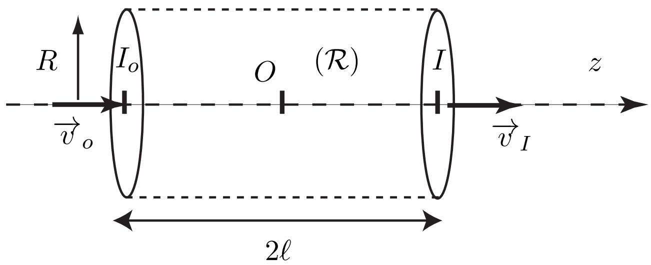
ou : $\boxed{\Phi(r,z) = 2\dfrac{U_o}{R^2}\left(-\dfrac{r^2}{2} + z^2\right) + C \quad ; \; C : \text{ constante d'intégration}}$

3.2.1.7. Surface équipotentielle

Le potentiel de la surface passant par l'origine est : $\Phi_o = \Phi(0,0) = C$. Donc l'équation de cette surface équipotentielle est telle que :

$$-\frac{r^2}{2} + z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = z\sqrt{2}}$$

3.2.2. Mouvement de l'électron dans la lentille



3.2.2.1. Théorème du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p}$$

$$r = r\overrightarrow{u}_r + z\overrightarrow{u}_z \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{p} = m_e\left(\frac{dr}{dt}\overrightarrow{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u}_z\right)$$

$$\overrightarrow{\sigma} = m_e\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{dr}{dt} \\ r\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zr\dfrac{d\theta}{dt} \\ z\dfrac{dr}{dt} - r\dfrac{dz}{dt} \\ r^2\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}_r,\overrightarrow{u}_\theta,\overrightarrow{u}_z)}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'électron dans le repère d'étude :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}\left(\vec{f_e}\right) = \vec{r} \wedge \vec{f_e} = \left(zF\left(r,z\right) - rG\left(r,z\right)\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_z.\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\left(\vec{u}_z\vec{\sigma}\right)}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u}_z\vec{\sigma} = \text{constante} = r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{soit :} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = r_o^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_o = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \text{constante}}$$

3.2.2.2. Théorème de la résultante cinétique

$$\vec{f_e} = -e\,\vec{E}\left(r,z\right) = +e\,\overrightarrow{grad}\Phi\left(r,z\right) = -e\left(r\beta\vec{u}_r - 2\beta\right)\vec{u}_z$$

La composante :

$$f_{ez} \;=\; \vec{f_e}.\vec{u}_z \;=\; 2e\beta\vec{u}_z$$

Pour que le mouvement de l'électron soit confiné au voisinage de l'axe Oz , il faut que :

$$\beta \;>\; 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{U_o \;>\; 0}$$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à l'électron dans le repère d'étude :

$$\vec{f_e} = m_e\vec{a} \qquad \text{avec} \qquad \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z \qquad \text{car} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Par projection, de l'équation vectorielle ainsi obtenue, suivant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$; on obtient deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} + \dfrac{e\beta}{m_e}r = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{2e\beta}{m_e}z = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} - 2\omega^2 z = 0 \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \omega = \sqrt{\frac{e\beta}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eU_o}{m_eR^2}}}$$

3.2.2.3. Expression de $z(t)$

$$\text{L'équation différentielle en } z(t) \;: \qquad \frac{d^2z}{dt^2} - 2\omega^2 z = 0$$

$$\text{Solution} \quad z(t) = A\cosh\left(\omega\sqrt{2}t\right) + B\sinh\left(\omega\sqrt{2}t\right)$$

A et B : constantes d'intégration ; $\sinh$ et $\cosh$ sont le sinus et le cosinus hyperbolique respectifs tels que

$$\begin{cases} \cosh x = \dfrac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right) \\ \cosh x = \dfrac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right) \end{cases}$$

$$\text{Conditions initiales :} z(t=0) = -\ell \;\text{ et }\; \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\ell \quad et \quad B = \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}}$$

$$\text{soit :} \qquad \boxed{z(t) = -\ell\cosh\left(\omega\sqrt{2}t\right) + \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}}\sinh\left(\omega\sqrt{2}t\right)}$$

3.2.2.4. On suppose satisfaite la condition $\omega\ell << v_o$

$$z(t) \sim \frac{v_o}{\omega\sqrt{2}}\sinh\left(\omega\sqrt{2}t\right)$$

$$\text{or } |z| \leq \ell \quad \Rightarrow \quad \sinh\left(\omega\sqrt{2}t\right) \leq \frac{\ell\omega}{v_o\sqrt{2}} << 1 \quad \Rightarrow \quad \omega\sqrt{2}t << 1 \quad \Rightarrow \quad \sinh\left(\omega\sqrt{2}t\right) \sim \omega\sqrt{2}t$$

Complément mathématique : la fonction $\sinh$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$! !

D'où : $\boxed{z(t) \sim v_o t \quad \text{ou :} \quad \frac{dz}{dt} = v_o}$

La durée t_1 est telle que : $z(t_1) = 2\ell$

soit : $\boxed{t_1 = 2\frac{\ell}{v_o}}$

3.2.2.5. Expression de $r(t)$:

L'équation différentielle en $r(t)$: $\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$

Solution $r(t) = A_o\cos(\omega t) + B_o\sin(\omega t)$

A_o et B_o : constantes d'intégration

Conditions initiales :$r(t=0) = r_o$ et $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_o = r_o \quad et \quad B_o = 0$

soit : $\boxed{r(t) = r_o\cos(\omega t)}$

Par hypothèse, la coordonné r_o de I_o (Cf.3.2.2.) est telle que $r_o << R$: par conséquent la trajectoire de l'électron reste au voisinage de l'axe Oz . Cette conséquence a pour correspondance en optique l'approximation de gauss dont on s'intéresse aux rayons paraxiaux !

3.2.2.6. Composantes de $\vec{v}_I$ On rappelle l'expression du vecteur vitesse, en coordonnées cylindriques, de l'électron dans le repère d'étude :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \qquad (\theta = \text{constante})$$

Compte tenu des résultats obtenus en 3.2.2.4. et 3.2.2.5., le vecteur vitesse pourra s'écrire sous la forme :

$$\vec{v} = -r_o\omega\sin(\omega t)\,\vec{u}_r + v_o\vec{u}_z$$

En I , $t = t_1 = 2\frac{l}{v_o} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_I = \vec{v}(t_1) = -r_o\omega\sin\left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right)\vec{u}_r + v_o\vec{u}_z$

La condition $\ell\omega << v_o$ étant encore satisfaite, d'où : $\vec{v}_I = -r_o\omega\left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right)\vec{u}_r + v_o\vec{u}_z$

soit : $\boxed{\vec{v}_I \begin{pmatrix} -\frac{2\ell r_o}{v_o}\omega^2 \\ 0 \\ v_o \end{pmatrix}_{(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)}}$

3.2.2.7. Principe d'inertie :

En dehors de la région (R) :

- le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est nul, par conséquent $\overrightarrow{f_e} = -e\overrightarrow{E}$ est également nulle.
- le poids $\overrightarrow{P}$ de l'électron est toujours négligeable .
- la résultante des forces auquelles es soumis l'électrons dans le référentiel d'étude est, donc, *nulle*.

D'où le système (électron de masse m_e) est *isolé*. D'après le principe d'inertie ($v_o \neq 0$), le mouvement de l'électron est *rectiligne uniforme*.

Énoncé : Dans un repère galiléen, tout système isolé, est : soit au repos , soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

3.2.2.8. Intersection de la trajectoire de l'électron avec l'axe Oz dans le région $z > \ell$

$$\overrightarrow{v}_I = -r_o\omega\left(\frac{2\ell\omega}{v_o}\right)\overrightarrow{u}_r + v_o\overrightarrow{u}_z$$

Équation de la trajectoire de l'électron dans la région $z > \ell$:

$$\overrightarrow{v}_I = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u}_r + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u}_z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{2\ell r_o}{v_o}\omega^2 \\ \text{et} \\ \dfrac{dz}{dt} = v_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = -\dfrac{2\ell r_o}{v_o}\omega^2 t + r_o \\ \text{et} \\ z(t) = v_o t + \ell \end{cases}$$

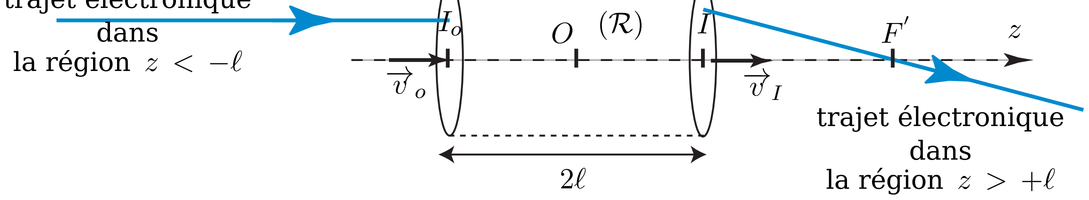
soit : $$r(z) = -\frac{2\ell r_o}{v_o^2}\omega^2(z-\ell) + r_o$$

La trajectoire est, donc dans le plan (r, z) , une droite de pente *négative*. Le point d'intersection F' de coordonnée $z_{F'}$ est tel que : $r(z_{F'}) = 0$.

soit : $$z_{F'} - \ell = \frac{v_o^2}{2\ell\omega^2} \text{ ou : } \boxed{z_{F'} = \ell + \frac{v_o^2}{2\ell\omega^2} = \ell + \frac{m_e R^2}{4\ell e U_o}v_o^2}$$

$z_{F'}$ est indépendant de la coordonnée r_o : par conséquent F' est indépendant de I_o . La puissance de la lentille électrostatique :

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{z_{F'}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lentille convergente}$$



Le point F' semble être le conjugué d'un objet à l'infini : d'où la nomination du foyer donnée à F' ; la distance focale est $z_{F'} = \overline{OF'}$

$$z_{F'} = \ell + \frac{R^2 V_c}{2\ell U_o}$$

La distances focale dépend de quatre paramètres : R, ℓ, V_c, et U_o

Application numérique : $z_{F'} = 0,5\,m$